几何建模

基本曲线与曲面

参数表示的数学原理：直线段

- 考虑直线段 $P_0(x_0, y_0, z_0) \rightarrow P_1(x_1, y_1, z_1)$
  - 参数表示

$$\mathbf{R}(t) = (1-t)\mathbf{P}_0 + t\mathbf{P}_1 \qquad 0 \le t \le 1$$

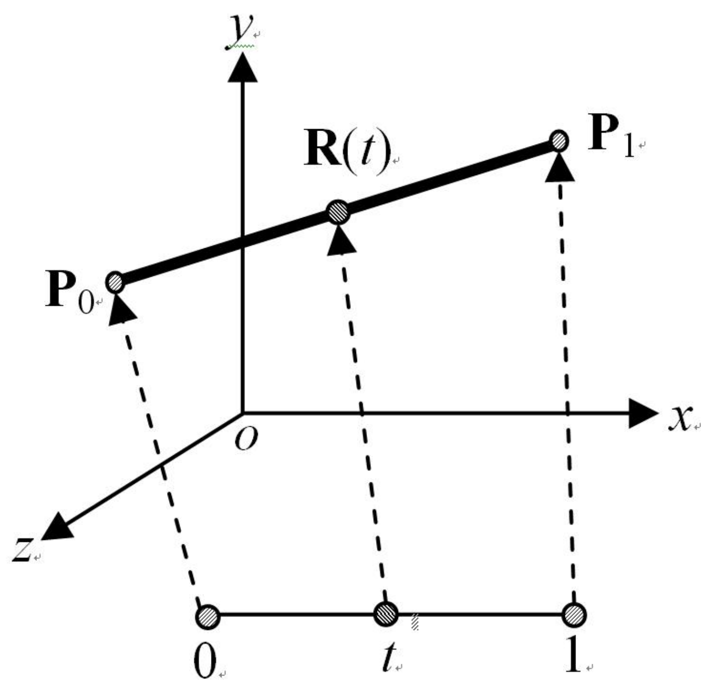
  - 分量表示

$$\begin{cases} x(t) = (1-t)x_0 + tx_1 \\ y(t) = (1-t)y_0 + ty_1 \\ z(t) = (1-t)z_0 + tz_1 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$

  - 参数空间：

$$0 \le t \le 1$$

参数表示的数学原理：直线段



- 直线段参数表示的直观几何意义
  - 参数空间中每一个参数(点)都对应于直线段上一个点
  - 参数空间的两个端点对应于直线段的两个端点

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{P}_0$$
$$\mathbf{R}(1) = \mathbf{P}_1$$

参数表示的数学原理：曲线

- 一般三维参数曲线形式：

$$\mathbf{R}(t)=(x(t),\,y(t),\,z(t))$$

  - 参数空间中每一个 t 对应于曲线上一个点R(t)
  - 图形学中，参数空间通常是有限区间，此时参数曲线称为参数曲线段
  - 图形学中，参数函数通常为分段多项式或有理多项式函数

参数表示的数学原理：四边面片

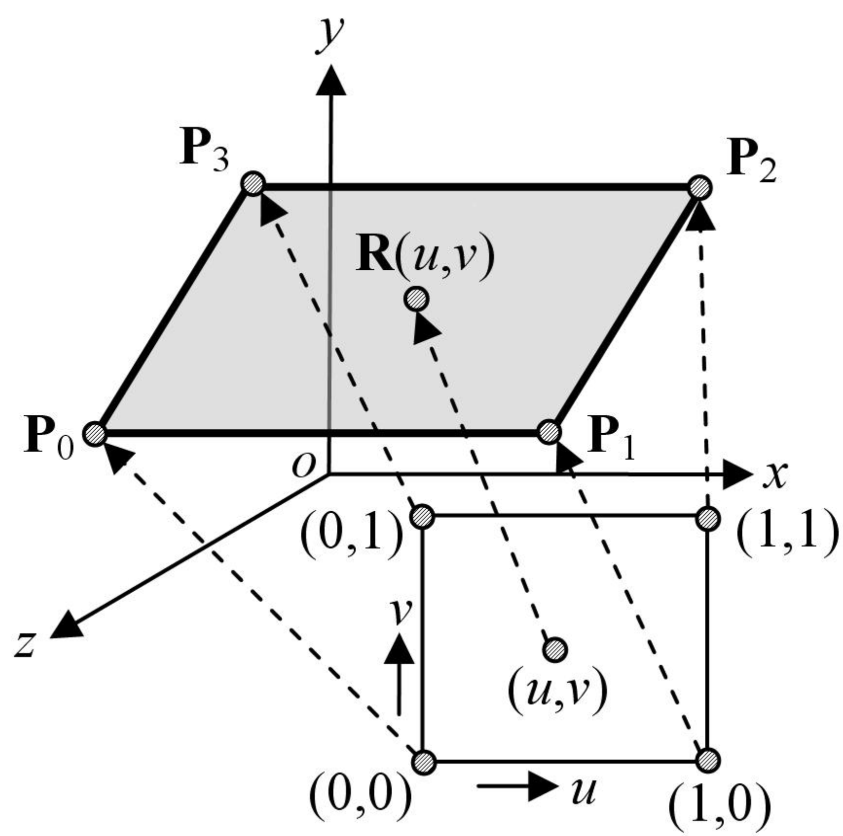
- 双线性四边面片：

$$\mathbf{R}(u,v)=(1-v)\left[(1-u)\mathbf{P}_0+u\mathbf{P}_1\right]+v\left[(1-u)\mathbf{P}_3+u\mathbf{P}_2\right]$$

$$(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

- 四边面片的四个顶点P_0、P_1、P_2和P_3对应于参数曲面的四个角点R(0,0)、R(1,0)、R(1,0)和R(0,1)

参数表示的数学原理：四边面片



双线性四边面片

参数表示的数学原理：曲面

- 一般形式的空间参数曲面

$$\mathbf{R}(u,v)=\left(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)\right)$$

- 参数空间中每一点(*u*, *v*)对应于曲面上一点R(*u*,*v*)
- 如果曲面的参数空间是一个有限的定义域(如矩形)，则对应的参数曲面称为参数曲面片
- 图形学中常用的参数曲面为张量积分片多项式或有理多项式参数曲面

参数表示的优势

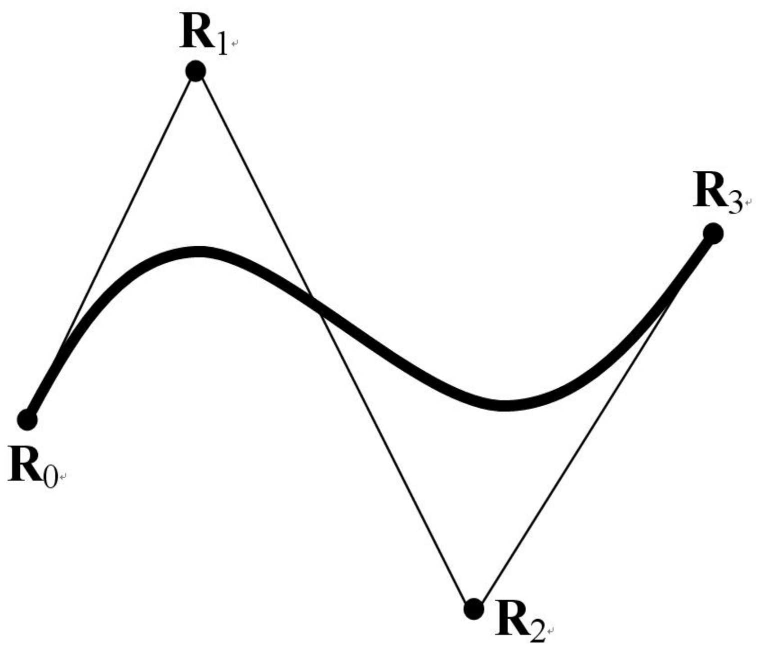
- 参数表示是显式的
  - 对每一个参数值，可以直接计算曲面上的对应点
  - 参数表示的物体可以方便地转化为多边形近似表示
- 曲面上几何量的计算简便(微分几何)：
  - 法向、曲率、测地线、曲率线等
- 特殊形式的参数表示的外形控制十分直观
  - Bézier
  - B-样条
  - 非均匀有理B-样条曲线/曲面
    - Non-Uniform Rational B-Spline, NURBS

Bézier与 Bézier 曲线

Pierre Bézier

(1910.9.1–1999.11.25)

法国雷诺公司工程师



Bézier曲线

Bézier曲线定义

- 一条n次Bézier曲线：

$$\mathbf{R}(t)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{R}_i B_{i,n}(t) \qquad 0\le t\le 1$$

- 多项式$\{B_{i,n}(t)\}$称为Bernstein基函数：

$$B_{i,n}(t)=C_n^i(1-t)^{n-i}t^i$$

$$C_n^i=n!/(i!(n-i)!)$$

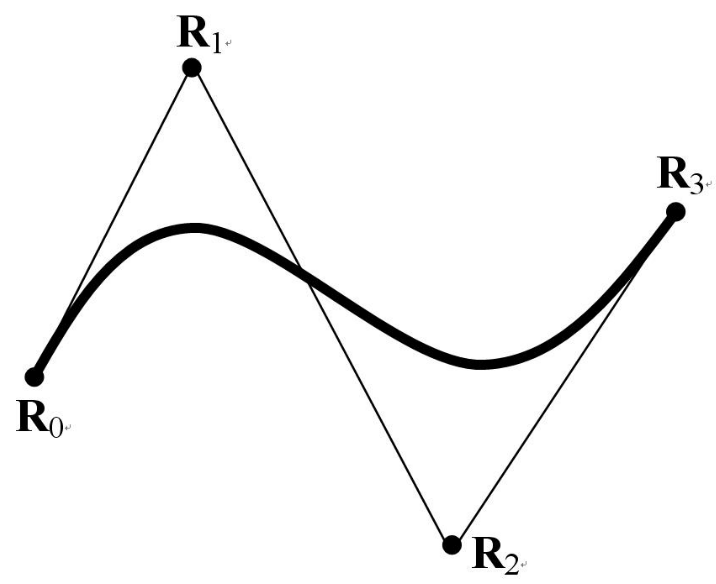
- 向量$\mathbf{R}_i$称为控制顶点，由其组成的多边形称为控制多边形

三次Bézier曲线矩阵表示

$$C(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

Bézier曲线性质

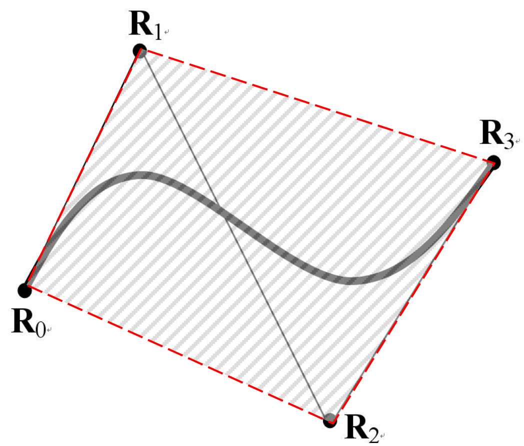
- 端点插值：
  - $R(0)=R_0 \quad R(1)=R_n$
- 端点切向：
  - $R'(0)=n(R_1-R_0)$
  - $R'(1)=n(R_n-R_{n-1})$
- 对称性：
  - $\sum_i R_{n-i}B_{i,n}(t) = \sum_i R_i B_{i,n}(1-t)$
  - 曲线的控制顶点的几何地位是对称的



三次Bézier曲线

Bézier曲线性质

- 凸包性：Bézier曲线位于控制多边形的凸包内



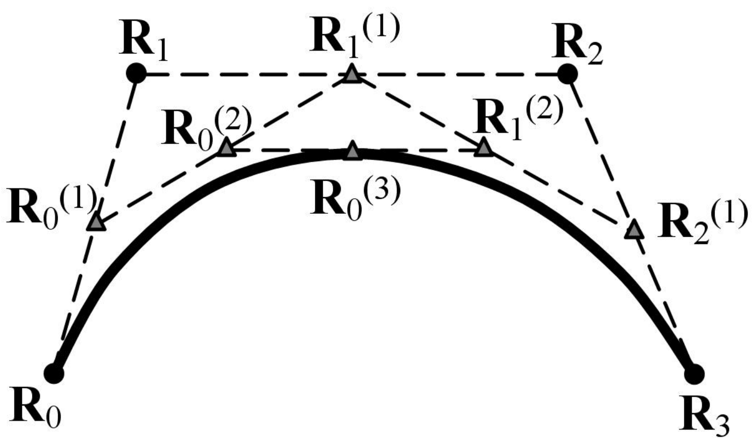
Bézier曲线的凸包性

  - 当控制顶点连成直线，定义直线段.

Bézier曲线性质

- 几何不变性：Bézier曲线的形状仅与控制多边形有关，与坐标系选择无关

Bézier曲线剖分性质



Bézier曲线剖分示意图

SubdivideBezierCurve(t_0, $\mathbf{R}(t)$)

{

    for(i=0; i<=n; i++)

        $\mathbf{R}_i^{(0)}=\mathbf{R}_i$;

    for(s=1; s<=n; s++)

        for(i=0; i<=n-s; i++)

            $\mathbf{R}_i^{(s)}=(1-t_0)\,\mathbf{R}_i^{(s-1)}+t_0\mathbf{R}_{i+1}^{(s-1)}$;

}

Bézier曲线剖分算法描述

De Casteljau's algorithm

Bézier曲线剖分性质

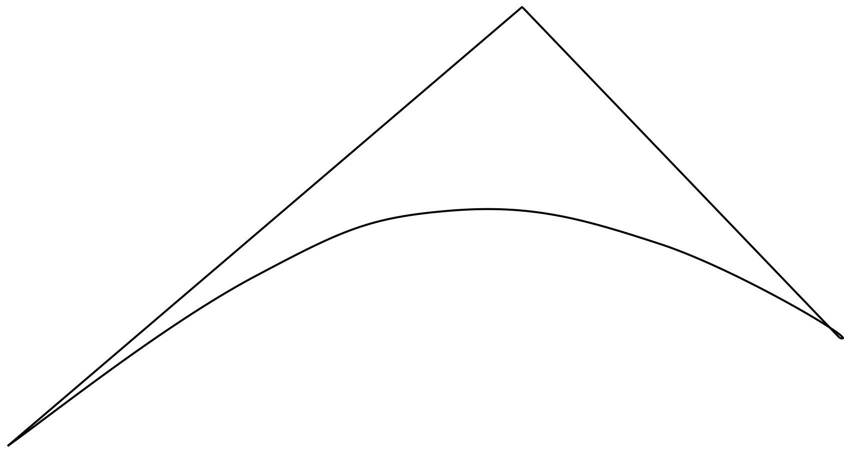
- 每次剖分，曲线分为两段新的Bézier曲线

$$\begin{cases} \mathbf{R}^{left}(t) = \sum_{s=0}^{n} \mathbf{R}_0^{(s)} B_{s,n}(t) \\ \mathbf{R}^{right}(t) = \sum_{s=0}^{n} \mathbf{R}_s^{(n-s)} B_{s,n}(t) \end{cases}$$

  - 新的控制多边形更加趋近于Bézier曲线
  - 当剖分次数足够大的时候，控制多边形可以作为Bézier曲线的逼近

二次 Bézier 曲线

- 次数最低的“曲线”
- 早期字型设计首选

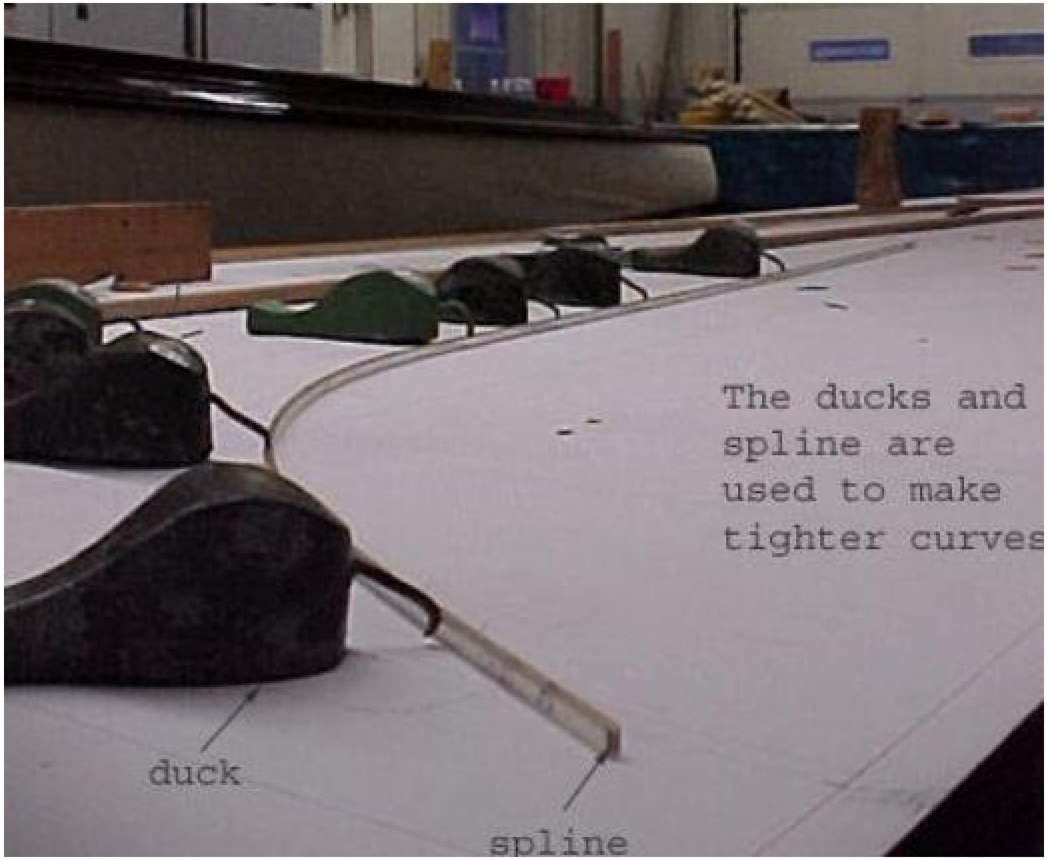


Bézier曲线的特点

- 整体性质：
  当移动曲线的一个控制顶点时，
  整条曲线的形状都会发生改变

- 表示复杂形状时，需要将多条Bézier 曲线光滑拼接起来，即Bézier“样条曲线”。
  - 位置连续：C^0(或G^0)
  - n次导数(或几何)连续：C^n(或G^n)

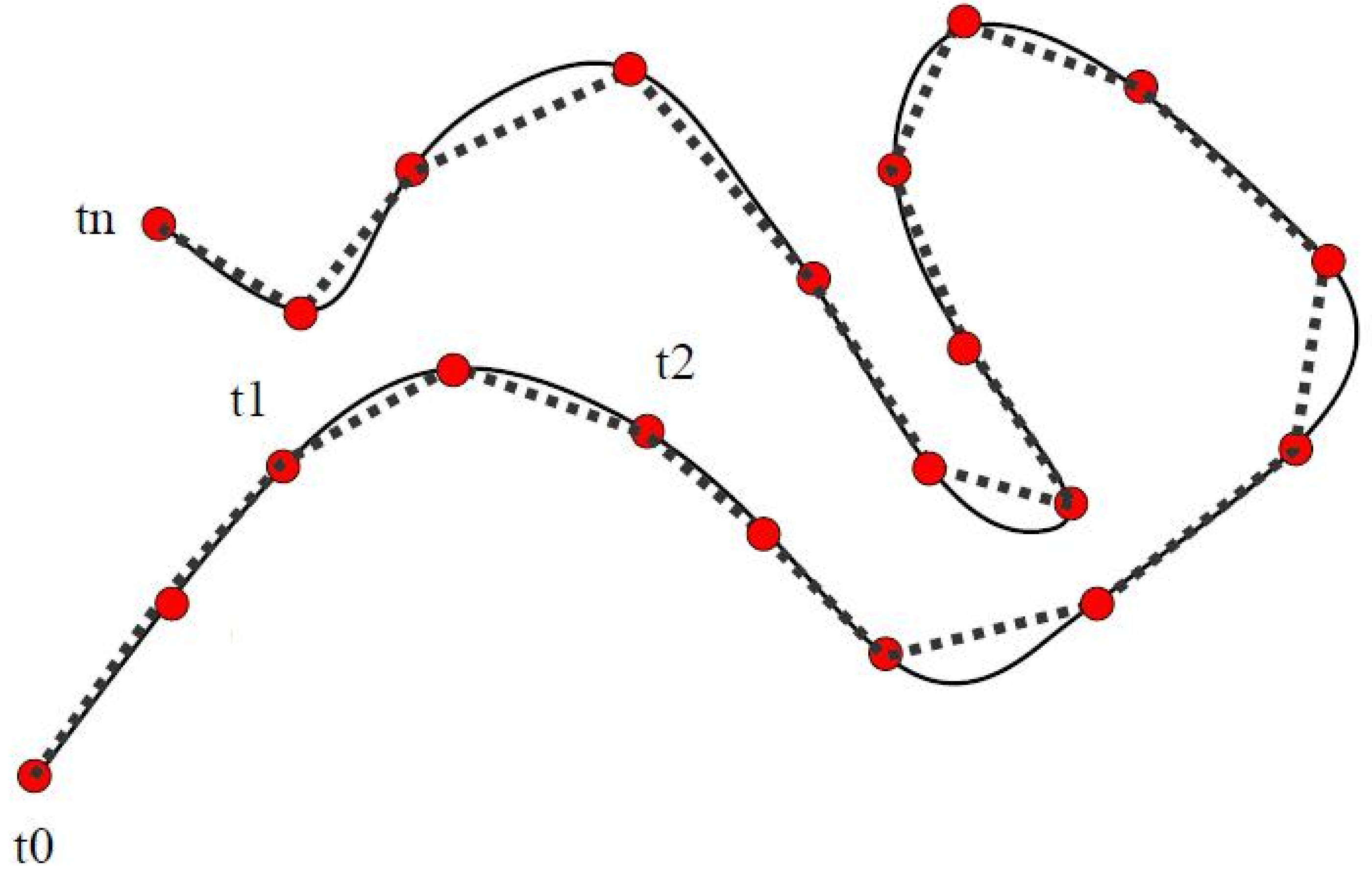
样条函数与样条曲线


The ducks and
spline are
used to make
tighter curves
duck
spline

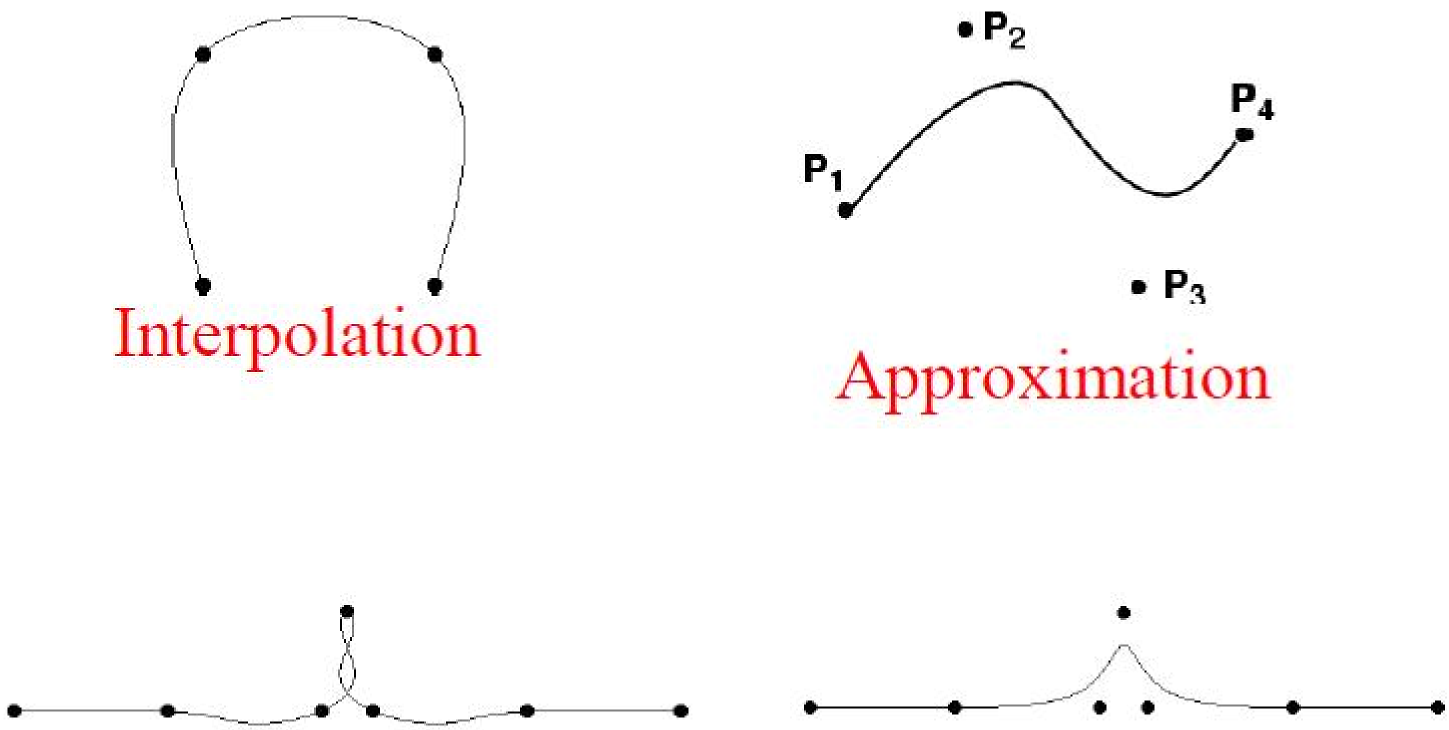
样条函数与样条曲线

- 样条函数来源于物理样条的数学模型
  - 力学模型：“梁”的弯曲
- 对于几何建模的意义
  - 用低次代数多项式代替高次多项式
  - 常见的低次样条函数
    - 2次，3次，5次多项式

分段低次多项式样条曲线



插值与拟合



B-样条曲线的定义

- B-样条曲线是分段连续的多项式曲线，其定义与**节点向量**密切相关
- 定义在**节点向量**u={u_0, u_1, …, u_i, …, u_{n+k+1} }（其中$u_i \leqslant u_{i+1}$ ）上的k次(k+1阶)、具有(n+1)个控制顶点的B-样条曲线为：

$$\mathbf{R}(u)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{R}_i N_{i,k}(u)$$

- 常见的节点分布：
  - 均匀/非均匀，节点之间等距/非等距
  - 准均匀,首末端点重复

B-样条曲线的定义

R_i为控制顶点，$\{R_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$顺次连接称为曲线的控制多边形

$N_{i,k}(u)$为单位化的 k 次B-样条基函数：

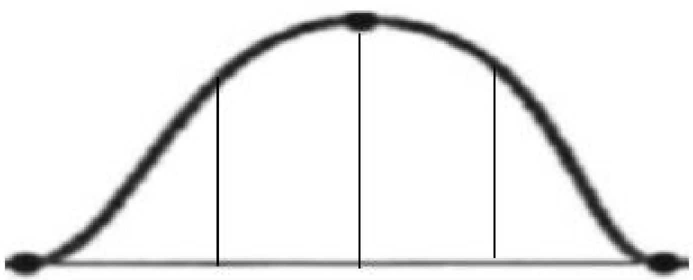
$$
\begin{cases}
N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{当} u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\
N_{i,k}(u) = \dfrac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \dfrac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\
\text{定义} \dfrac{0}{0} = 0
\end{cases}
$$

B-样条曲线的定义

- 定义了一组权函数
  - 权函数应满足某些基本的数学性质
    - 如正性，归一化，等等
- 用加权和来定义曲线

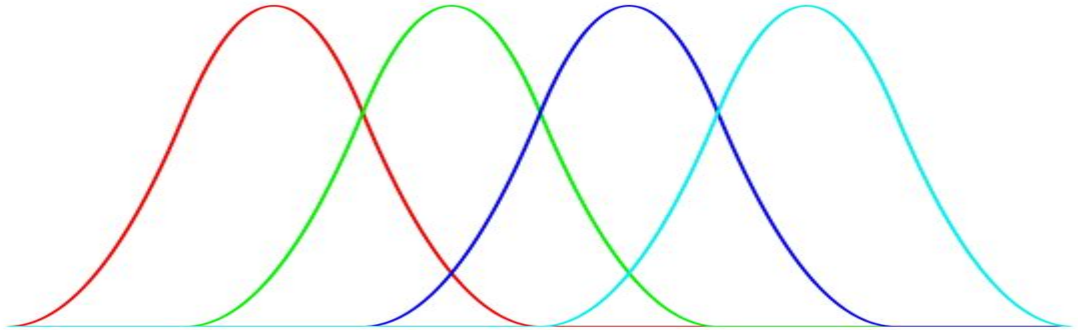
B-样条函数

- 三次B-样条基函数的定义：
  - 四段三次多项式曲线构成
  - 每段三次曲线由四个系数定义，共16 个系数要确定
  - 在五个连接点处有三个连接条件要满足：即函数、一阶导数、二阶导数连续条件，得到15个系数方程
  - 再加上归一化条件，即平移到同一个区间后的四个分段函数的和为常数1



B–样条函数

三次均匀B–样条基函数：



(非均匀/准均匀)B-样条基函数实例

k=3　三次曲线

节点向量:

t=[0 0 0 1 2 2 2]

在 t = 0.6 处，
基函数的和为:

$$N_{1,3}+N_{2,3}+N_{3,3}+N_{4,3}$$

$$= 0.16 + 0.66 + 0.18 + 0.0$$

$$= 1.0$$