几何建模

基本曲线与曲面

B-样条曲线的定义

- B-样条曲线是分段连续的多项式曲线，其定义与节点向量密切相关
- 定义在节点向量u={u_0, u_1, ⋯, u_i, ⋯, u_{n+k+1} }（其中$u_i \leqslant u_{i+1}$ ）上的k次(k+1阶)、具有(n+1)个控制顶点的B-样条曲线为：

$$\mathbf{R}(u)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{R}_i N_{i,k}(u)$$

- 常见的节点分布：
  - 均匀/非均匀，节点之间等距/非等距
  - 准均匀,首末端点重复

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条曲线的定义

R_i为控制顶点，$\{R_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$顺次连接称为曲线的控制多边形

$N_{i,k}(u)$为单位化的 k 次B-样条基函数：

$$\begin{cases} N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{当} u_i \le u < u_{i+1} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \\ N_{i,k}(u) = \dfrac{u - u_i}{u_{i+k} - u_i} N_{i,k-1}(u) + \dfrac{u_{i+k+1} - u}{u_{i+k+1} - u_{i+1}} N_{i+1,k-1}(u) \\ \text{定义} \dfrac{0}{0} = 0 \end{cases}$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

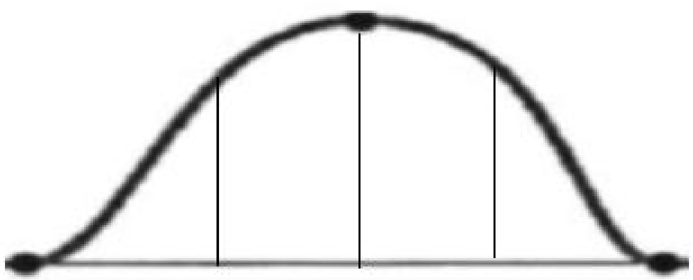
B-样条曲线的定义

- 定义了一组权函数
  - 权函数应满足某些基本的数学性质
    - 如正性，归一化，等等
- 用加权和来定义曲线

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条函数

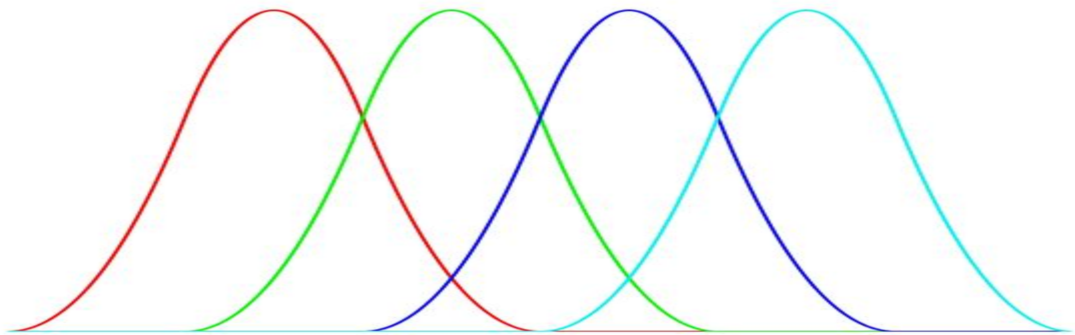
- 三次B-样条基函数的定义：
  - 四段三次多项式曲线构成
  - 每段三次曲线由四个系数定义，共16 个系数要确定
  - 在五个连接点处有三个连接条件要满足：即函数、一阶导数、二阶导数连续条件，得到15个系数方程
  - 再加上归一化条件，即平移到同一个区间后的四个分段函数的和为常数1



本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条函数

三次均匀B-样条基函数:



本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

(非均匀/准均匀)B-样条基函数实例

k=3　三次曲线

节点向量：

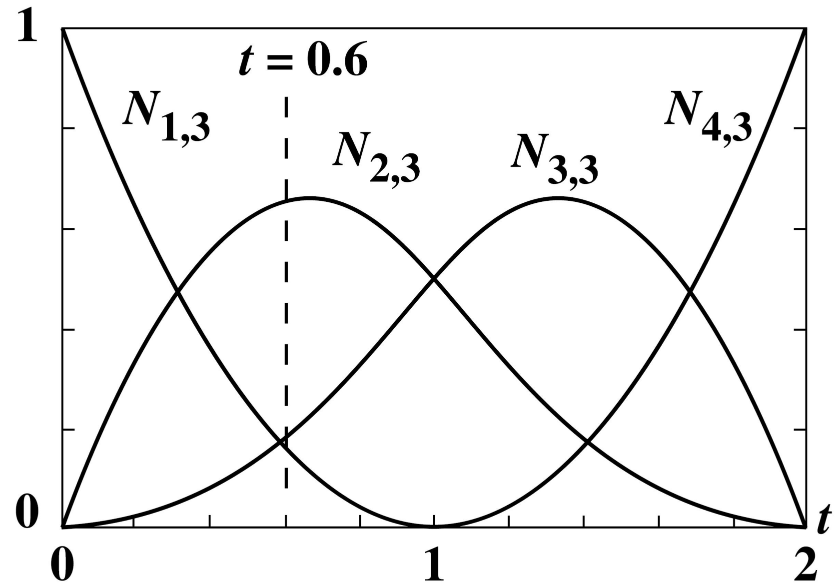
t=[0 0 0 1 2 2 2]

在 t = 0.6 处，
基函数的和为：

$N_{1,3}+N_{2,3}+N_{3,3}+N_{4,3}$

= 0.16 + 0.66 + 0.18 + 0.0

= 1.0



本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

均匀B 样条曲线矩阵表示

- （第 i 段）三次 B 样条曲线的矩阵表示

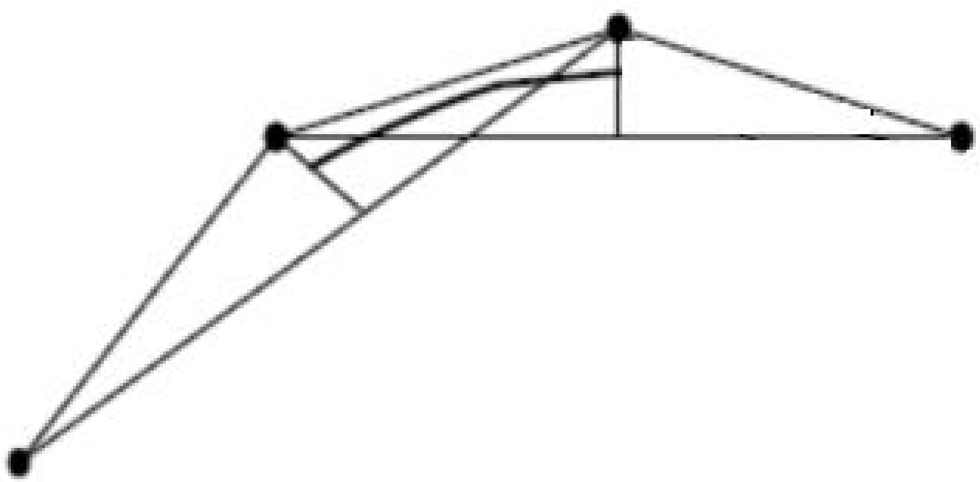
$$C_{i,3}(u)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{i-1}\\ P_i\\ P_{i+1}\\ P_{i+2}\end{bmatrix}$$

其中：u∈[0,1]

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

均匀B 样条曲线

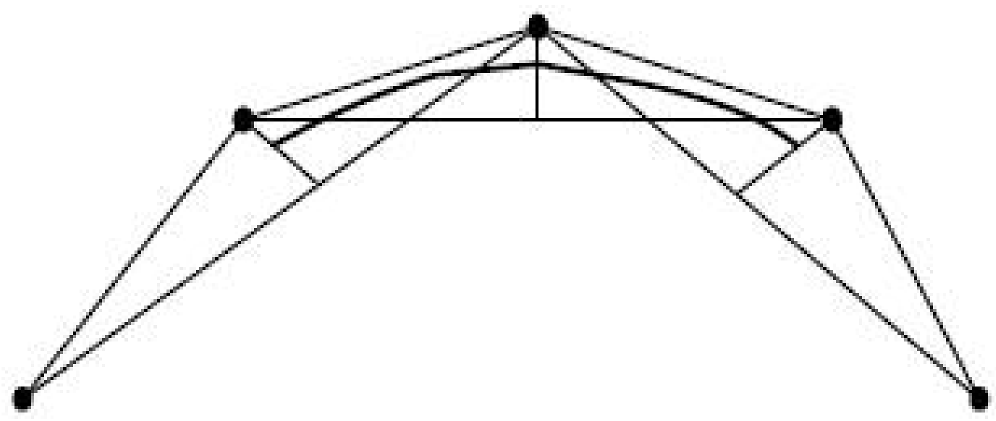
- 一段三次均匀B样条曲线



本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

均匀B 样条曲线

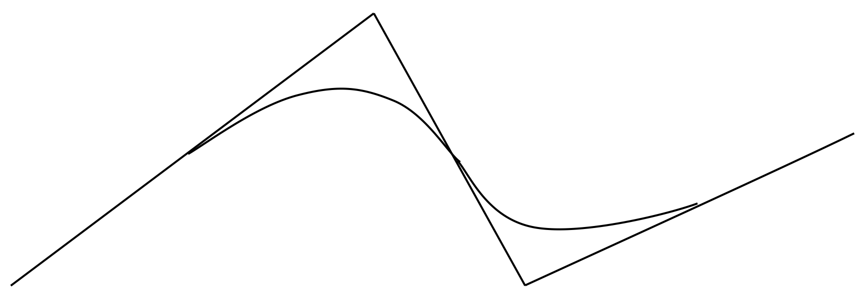
- 多段三次B样条曲线的自动光滑连接



本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

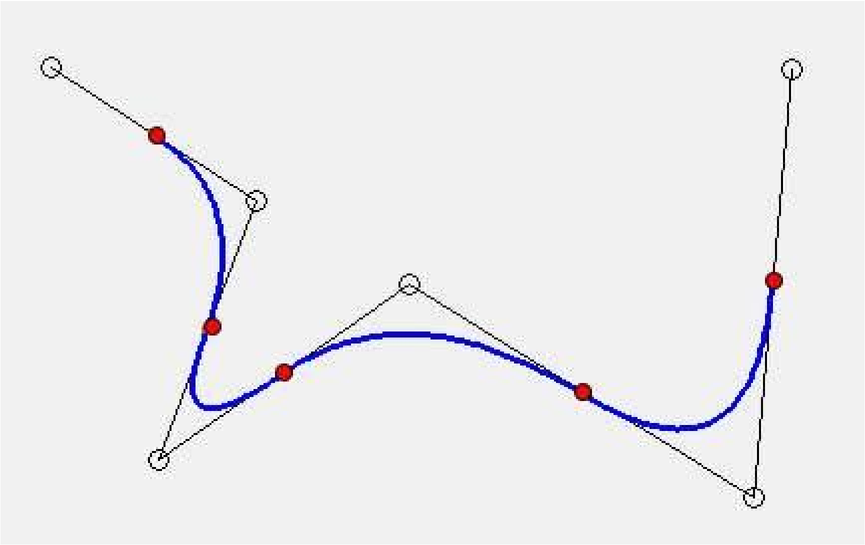
均匀B 样条曲线

- 二次B样条曲线的连接
  - 与控制多边形的中点相切的曲线



本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

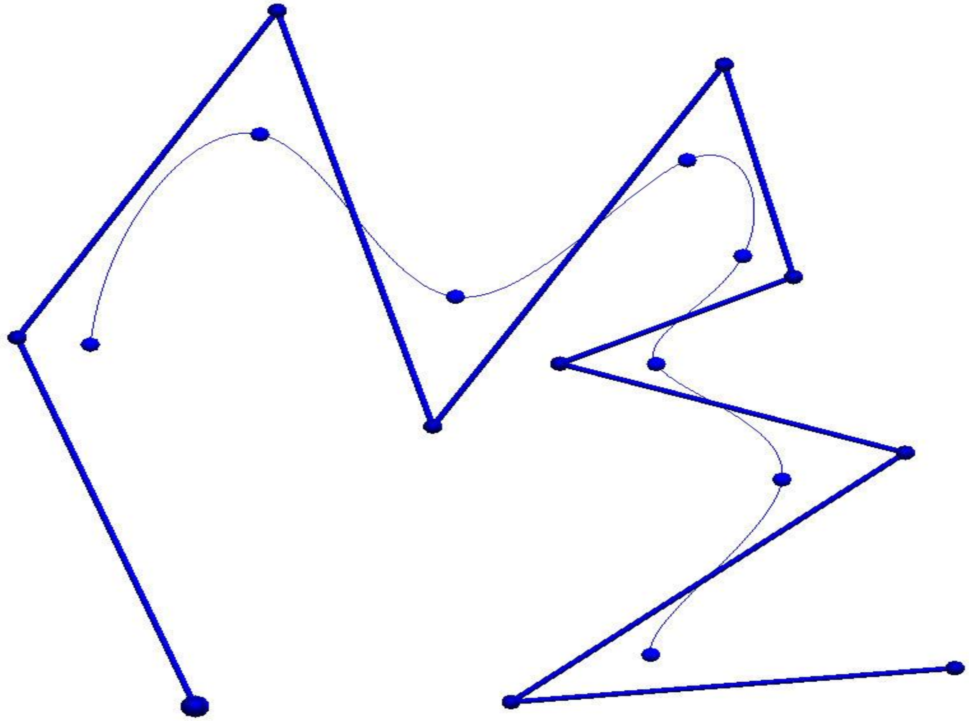
B-样条曲线实列



二次均匀B-样条曲线

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

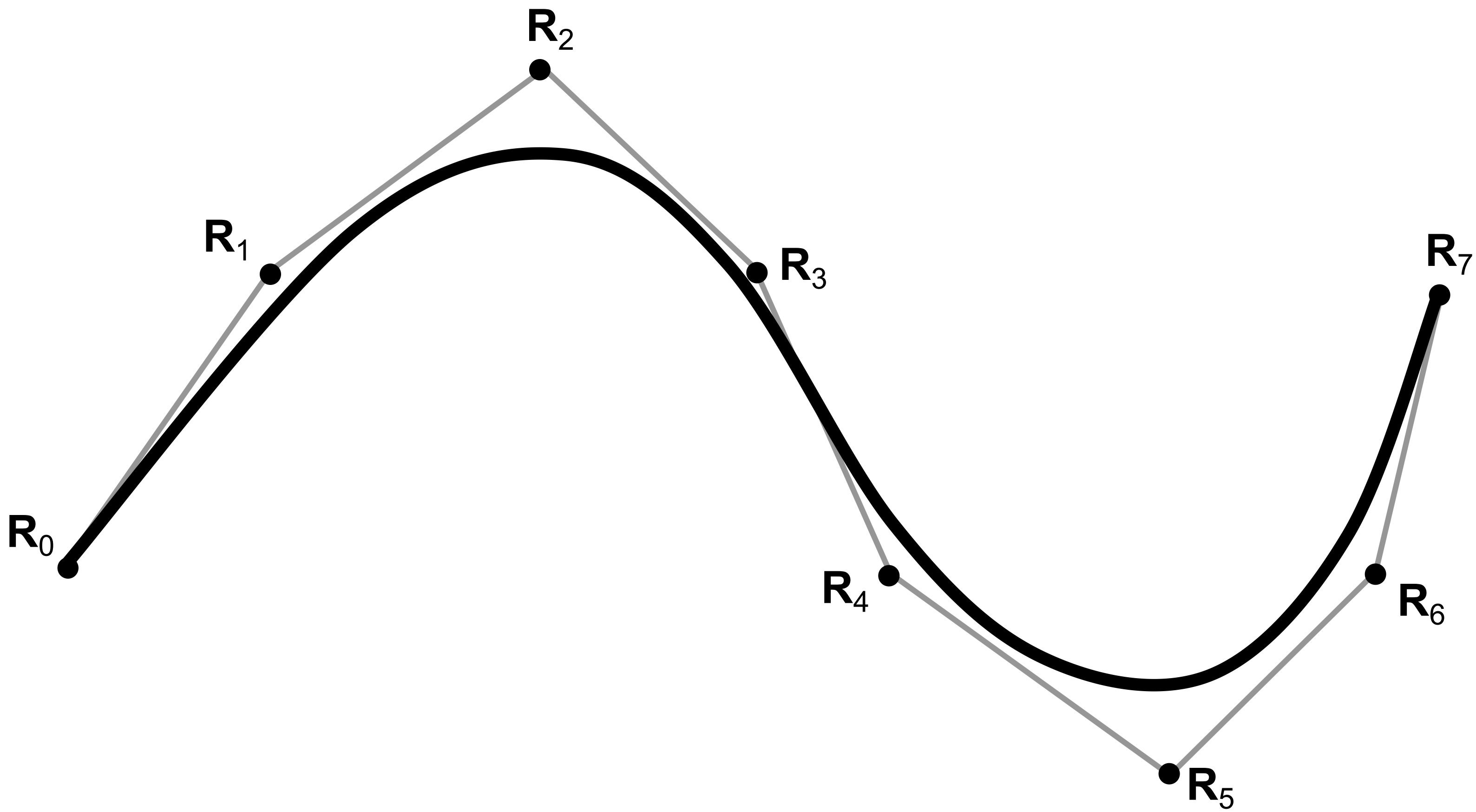
B-样条曲线实列



三次均匀B-样条曲线

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条曲线实列



“准均匀”三次B-样条曲线

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

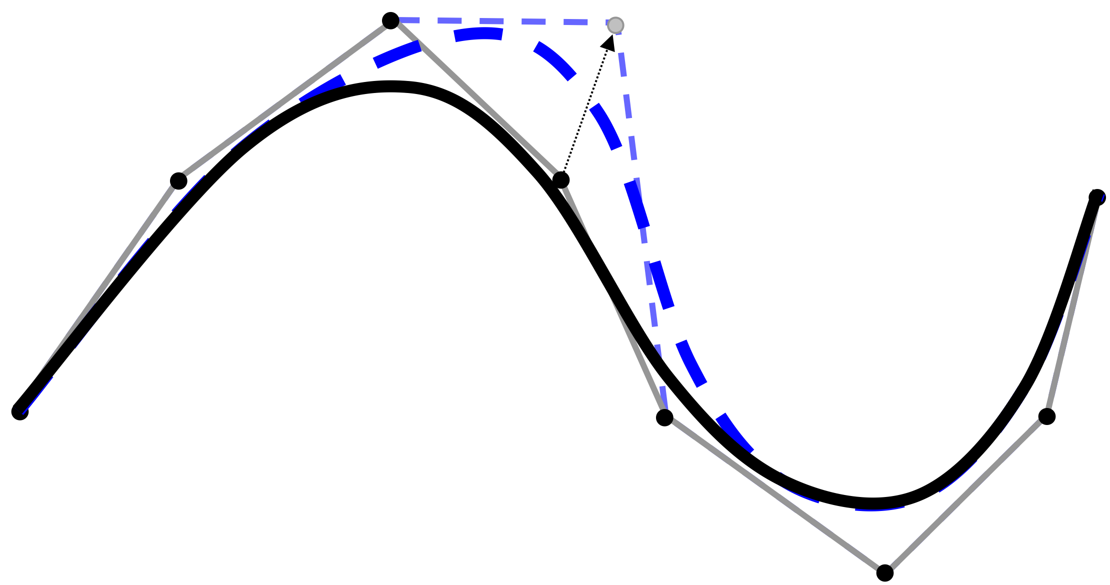
B-样条曲线性质

- B-样条曲线具有**凸包性**和**几何不变性**
- 当曲线的两个端节点的重复度是k+1时
  - B-样条曲线具有类似于Bézier曲线的性质
    - **端点插值**
    - **端点切线**与控制多边形的起始边与终止边相切
  - 当每一个节点都是重复度k+1时，B-样条曲线就是一条Bézier曲线

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条曲线性质

- **局部性**：当移动一个控制顶点时，只会影响曲线的一部分，而不是整条曲线

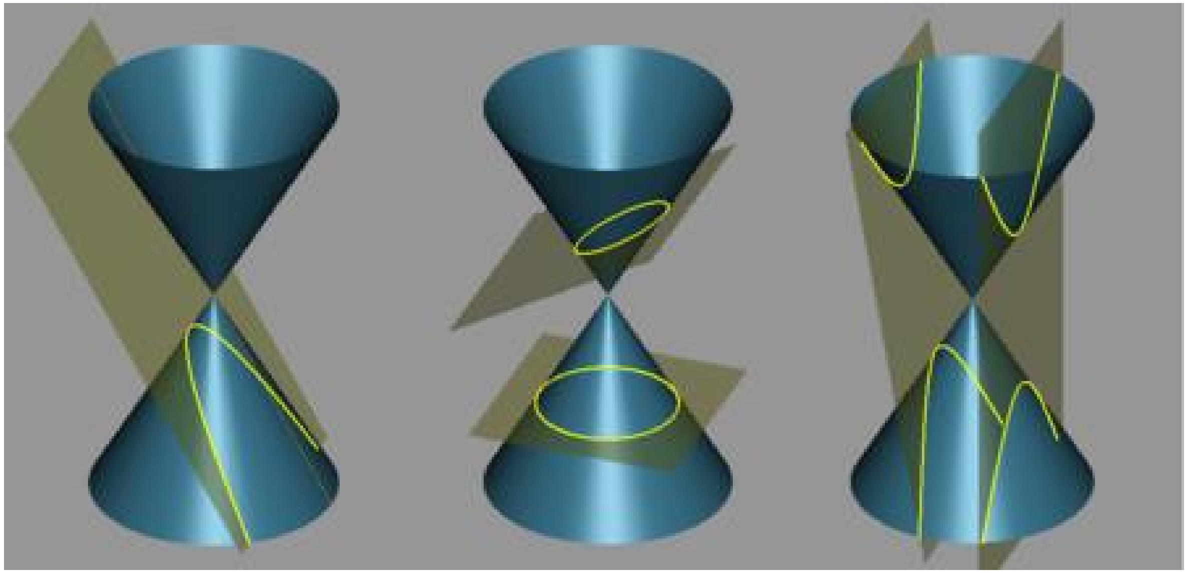


三次B-样条曲线的局部性质

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS 曲线（曲面）

- B-样条情形不能精确表示二次曲面与平面的交线，如圆锥曲线(平面与圆锥的交线)



抛物线　　椭圆(上)与圆(下)　　双曲线

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS曲线

- NURBS (Non-Uniform Rational B-Spline): “非均匀有理B-样条”

- 定义:

$$\mathbf{R}(u)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\omega_i\mathbf{R}_i N_{i,k}(u)}{\sum_{i=0}^{n}\omega_i N_{i,k}(u)}$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS曲线

- 可看成
  - 高一维的齐次空间坐标$(\omega_i R_i, \omega_i)$定义的标准 B样条曲线，在对应的欧氏空间的投影（除法）；
  - 或者，是在欧氏空间，由一组扩展的有理多项式基函数定义的曲线：

$$\Re_{i,k}(u) = \frac{\omega_i N_{i,k}(u)}{\sum_{j=0}^{n} \omega_j N_{j,k}(u)}$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS曲线

- $\{N_{i,k}(u)\}$为单位化的B-样条基函数
- $\{R_i\}$为控制顶点
- NURBS曲线新增加的曲线控制手段是权因子$\{\omega_i\}$，因此，要选择一个权因子序列：
  - 首末两个权因子$\omega_0>0$、$\omega_n>0$
  - 一般选择其余的权因子满足$\omega_i\geq 0$

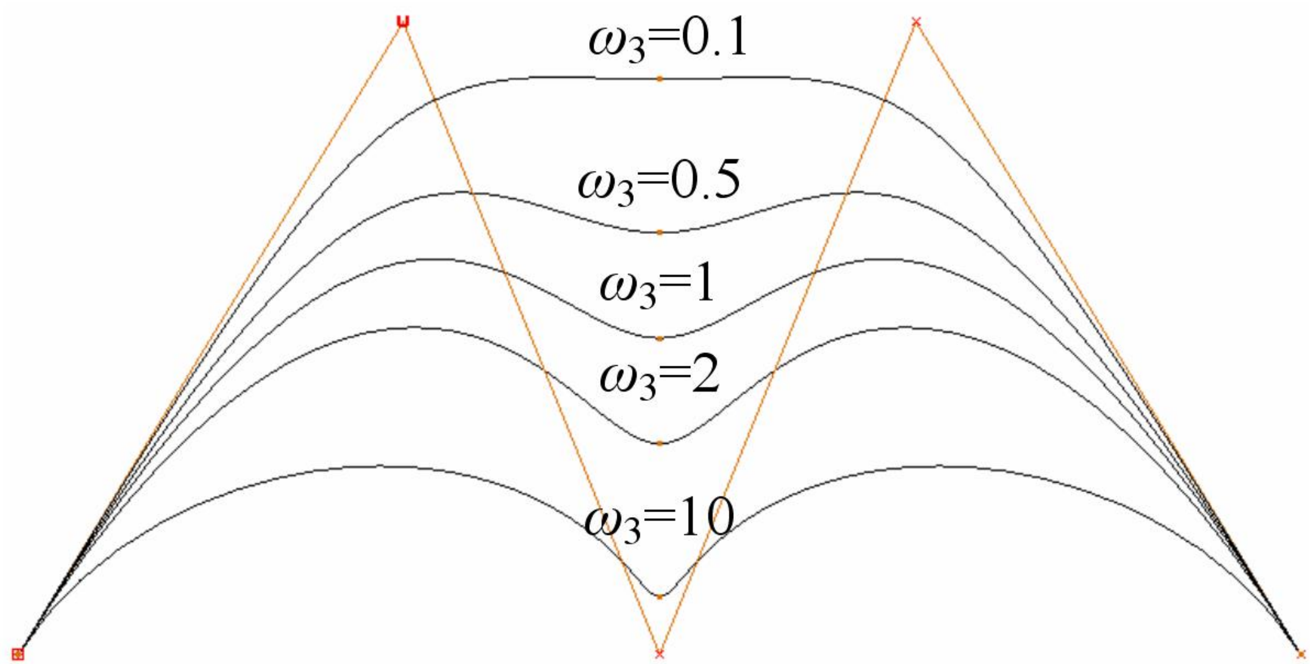
本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS曲线的权因子

- 每一个权因子对应于一个控制顶点
- 改变权因子大小可以调节 NURBS 曲线的形状
  - 当所有的权因子都是相同的常数，如 ω_i=1时，由基函数的规范化性质，就退化为多项式B-样条曲线；
  - 当某个权因子 ω_i=0时，对应的控制顶点对曲线的形状没有影响
  - 当 $\omega_i \to \infty$ 时，曲线 $R(u) \to R_i$ ，即曲线趋近于点 R_i

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS曲线的例子



NURBS曲线权因子对曲线形状的影响

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS曲线表示圆

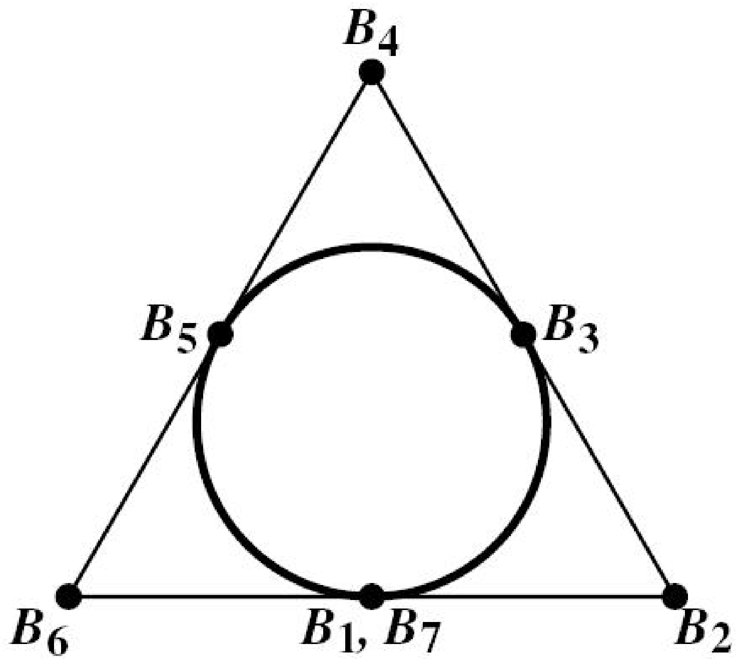
用三个120° 圆弧表示圆：

$k = 2$

u=[0 0 0 1 1 2 2 3 3 3]

$[\omega_i] = [1, ½, 1 , ½, 1, ½, 1]$

控制顶点分布如右图所示

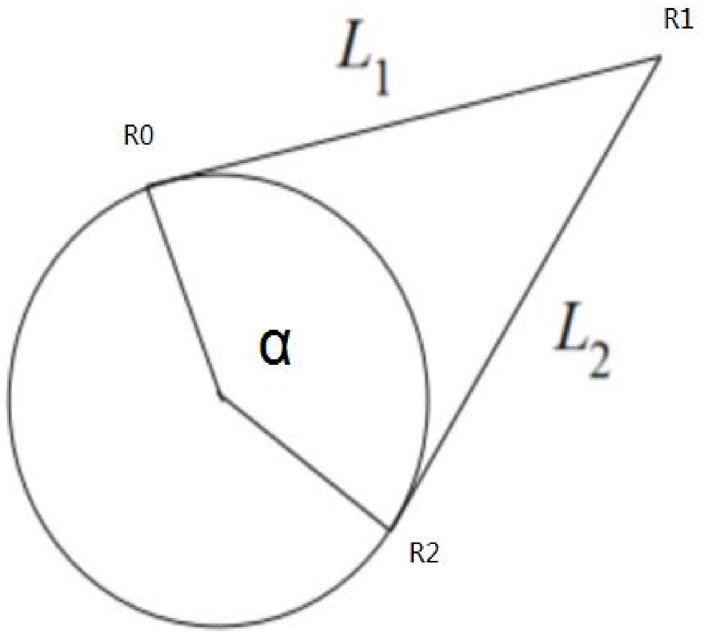


NURBS曲线表示圆

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

有理Bézier曲线：一段圆弧的定义

由于重复节点的二次B样条函数变成二次Bézier函数，可以用一条有理 Bézier曲线定义一段圆弧：

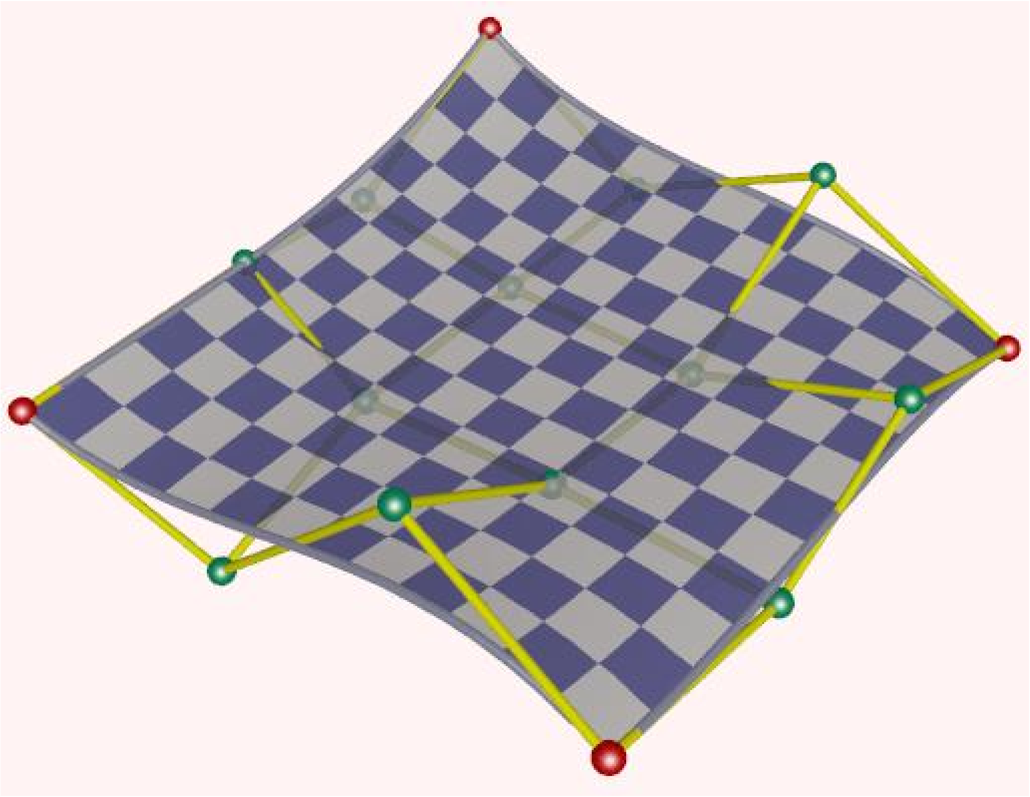


$$L_1 = L_2$$

$$\frac{w_0 \cdot w_2}{w_1^2} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

双三次Bézier曲面实列



双三次Bézier曲面实例

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

Bézier曲面

- $m\times n$次Bézier曲面：

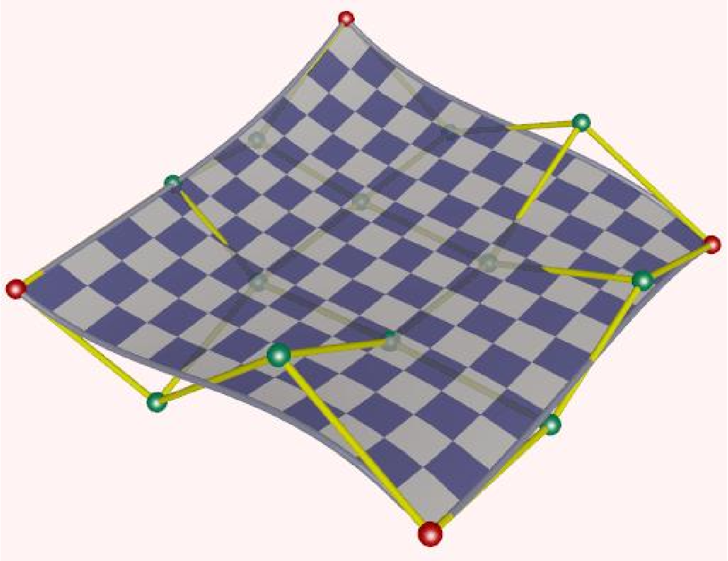
$$\mathbf{R}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\mathbf{R}_{ij}B_{i,m}(u)B_{j,n}(v)$$

  - $B_{i,m}(u)$和$B_{j,n}(v)$为Bernstein基函数
  - $\{R_{i,j}\}$规则连接形成控制网

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

Bézier曲面性质

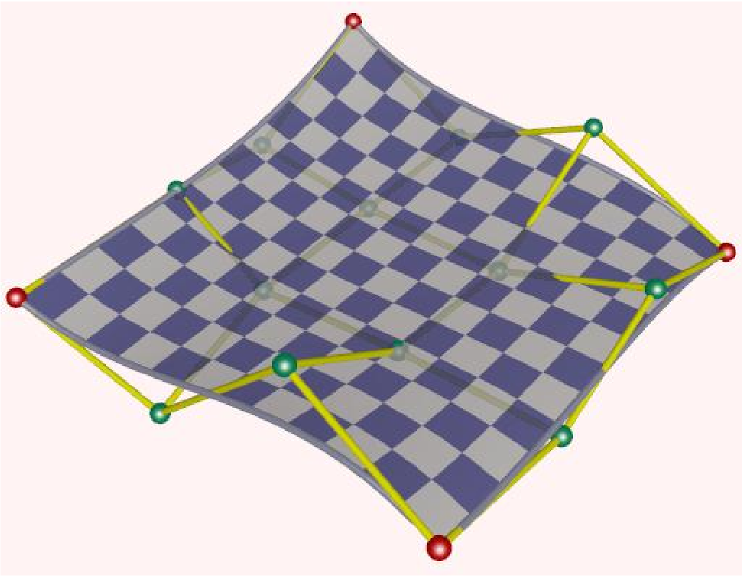
- Bézier曲面的控制顶点所形成的控制网格大致反应了曲面的形状，所以可通过编辑控制顶点的方式来实现对曲面形状的改变



本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

Bézier曲面性质

- Bézier曲面通过四个角点处的控制顶点



$$\mathbf{R}(0,0)=\mathbf{R}_{00} \qquad \mathbf{R}(1,0)=\mathbf{R}_{m0}$$

$$\mathbf{R}(0,1)=\mathbf{R}_{0n} \qquad \mathbf{R}(1,1)=\mathbf{R}_{mn}$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

Bézier曲面性质

- 在角点处曲面与控制多边形相切

$$\mathbf{R}_u(0,0) = m(\mathbf{R}_{10} - \mathbf{R}_{00})$$
$$\mathbf{R}_v(0,0) = n(\mathbf{R}_{01} - \mathbf{R}_{00})$$

- Bézier曲面具有剖分算法：
  用加密的控制多边形来逼近显示Bézier曲面

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

Bézier曲面的特点

- 全局性：
  当移动一个控制顶点的位置时，
  整个曲面的形状会发生改变

- 生成复杂外形需要多个Bézier曲面的光滑拼接

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条曲面

- B-样条曲面定义：
  - 次数：$k_u \times k_v$
  - 控制顶点数：$(n_u+1) \times (n_v+1)$
  - 节点向量

$$\mathbf{u} = \left\{u_0, u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_{n_u+k_u+1}\right\}$$

$$\mathbf{v} = \left\{v_0, v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_{n_v+k_v+1}\right\}$$

$$\mathbf{R}(u,v) = \sum_{i=0}^{n_u} \sum_{j=0}^{n_v} \mathbf{R}_{ij} N_{i,k_u}(u) N_{j,k_v}(v)$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条曲面

$\{R_{i,j}\}$为控制顶点

$N_{i,ku}(u)$和$N_{i,kv}(v)$分别为定义在节点向量u和v上的规范化B-样条基函数

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条曲面的性质和特点

- 局部性质
  - 改变一个顶点，仅有部分形状受到影响
- 控制顶点数目
  - Bézier曲面的次数确定后，控制顶点数目就定了
  - B-样条曲面的次数确定后，控制顶点数目取决于定义的曲面片的个数
- 其它性质：参考曲线情形

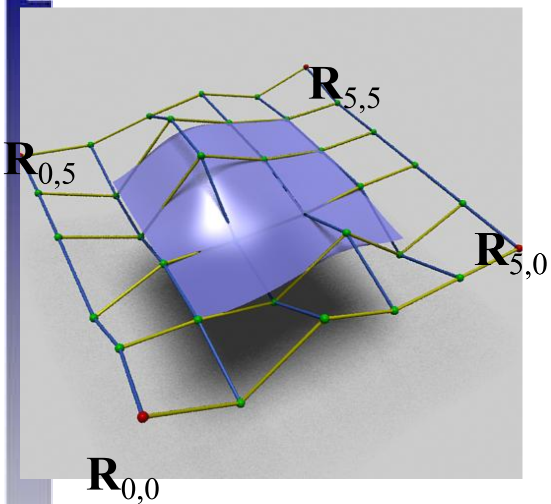
本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

B-样条曲面的性质和特点

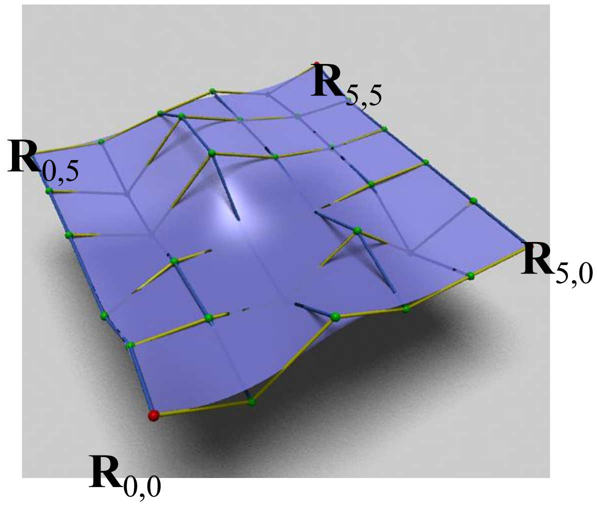
- 参数多项式形式的B-样条曲面，一般表示抛物面
- 不能精确表示常用的二次曲面：如球面、圆柱面、圆锥面等

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

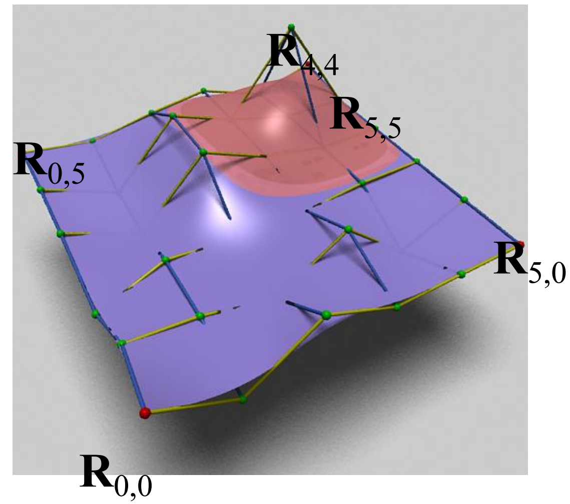
B-样条曲面实例



(a) 均匀节点



(b) 端点重节点



(c) B-样条曲面的局部性

具有6×6个控制顶点双三次B-样条曲面：

(a) 均匀节点向量u=v =[−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]，所构造曲面不插值角点

(b) 具有端点处4阶重节点的节点向量u=v=[0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3]，曲面插值角点

(c) 采用了与图(b)相同的节点向量，扰动顶点$R_{4,4}$的位置后，其形状变化的红色区域局限于变动顶点的邻域中.

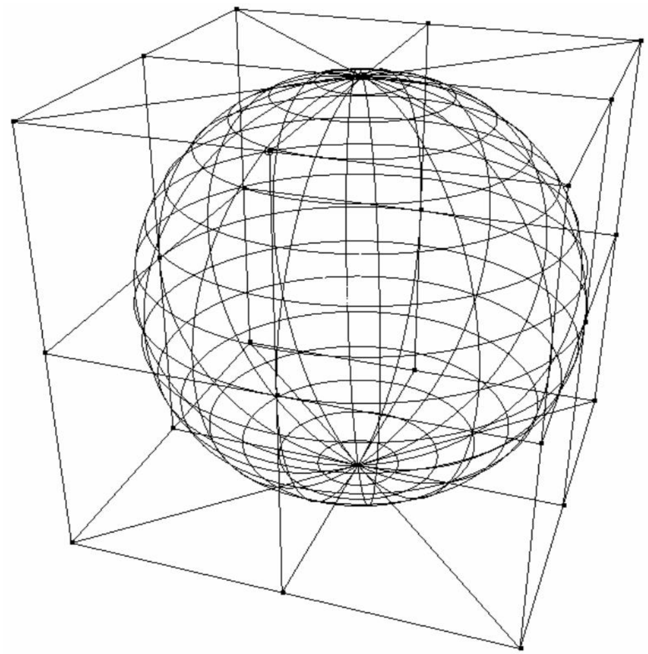
本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

非均匀有理 B 样条曲面

- NURBS曲面
  - 增加了权因子作为形状控制手段
  - 包含B-样条曲面和Bézier曲面
  - 可以精确表示设计中常用的二次曲面
- 工业产品几何定义的STEP标准（1991年):
  - 自由曲线/曲面唯一地采用NURBS表示

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

NURBS曲面表示球面



NURBS精确表示的球面及其控制顶点网格
可利用圆弧的构造方法由半圆旋转生成

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

函数连续与曲线光滑

- 曲线设计中，多项式次数的选择
- 曲线的光滑
  - 函数连续与几何连续

$$C^0, C^1, C^2$$

$$G^0, G^1, G^2$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用

函数连续与曲线光滑

- 曲线几何连续条件：$C_2=C_1$（f(t)）

$$c_2(t_+)=c_1(t_-)$$

$$c_2'(t_+)=\alpha c_1'(t_-),\ \alpha>0$$

$$c_2''(t_+)=\alpha^2 c_1''(t_-)+\beta c_1'(t_-)$$

- 曲线的曲率公式

$$k=\frac{|r'\times r''|}{|r'|^3}$$

本课件相关内容均来自互联网及相关教程公开资料，仅做学术交流用途，不做商用