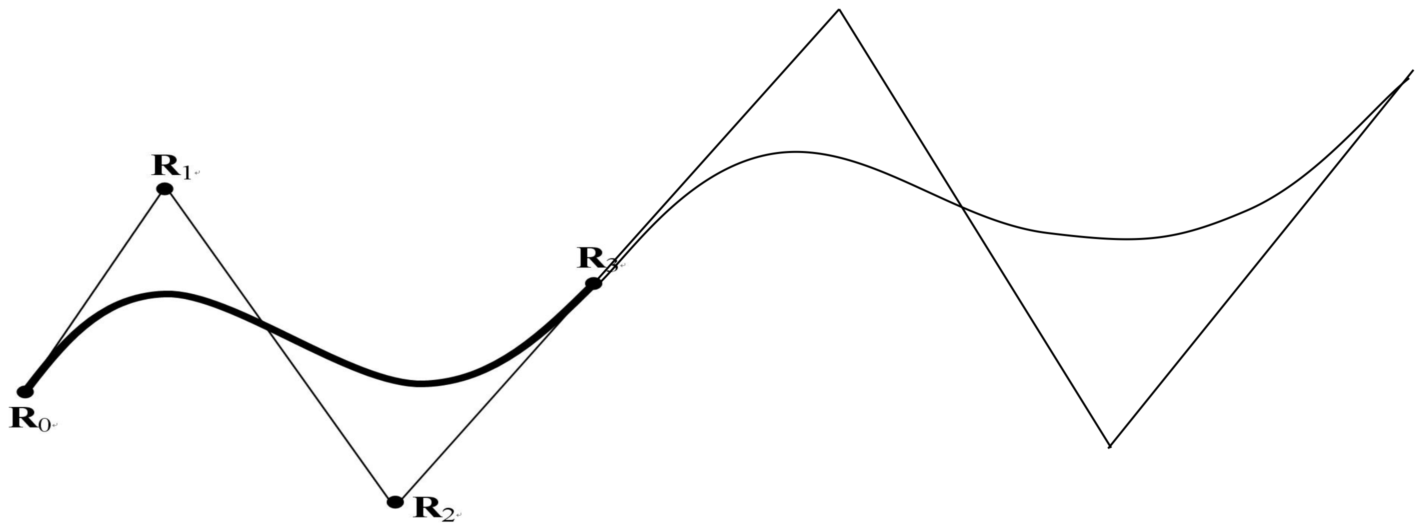
几何建模

基本曲线与曲面

Bezier 曲线的连接

- 由Bezier 曲线定义的样条曲线
  - 几何零阶，首尾相接，边界点重合
  - 几何一阶,边界多边形共线
  - 几何二阶,靠近边界的第三点有多余的自由度



B样条曲线插值定义

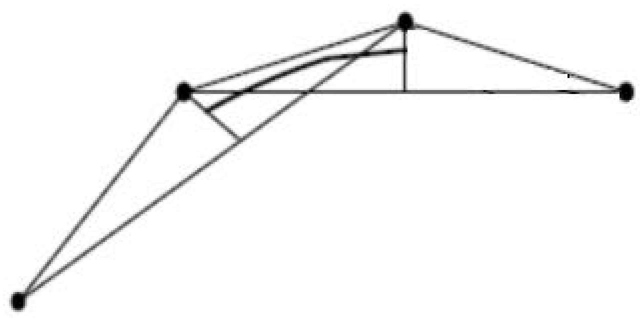
- 给定节点序列，可计算B样条函数
  - 例如，均匀节点
- 给定控制顶点，可定义B样条曲线

- 逆问题：
  - 如果要求定义一条曲线，通过给定的点，如何定义B样条曲线？
  - 一般需要求解一个线性方程组，得到控制顶点完成曲线的定义

$$\mathbf{R}(u)=\sum_{i=0}^{n}\mathbf{R}_i N_{i,k}(u)$$

B样条曲线插值定义

- 以三次B样条曲线为例



  - 设给定N个点的坐标向量；
  - 由曲线和控制顶点的关系可知，需要确定(N+2)控制顶点;

B样条曲线插值定义

- 假定已经选择了节点序列，B样条基函数可计算
- 在已知点 $Q_i, i=1,2,\ldots,N$，
  可得到求解控制顶点P_i 的N 个方程：

$$C_{i,3}(u)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{i-1}\\ P_i\\ P_{i+1}\\ P_{i+2}\end{bmatrix}$$

其中：i=1,2,…,N−1,共有（N−1）段曲线

B样条曲线插值定义

- 当u=0,得到 $$C_{i,3}(0)=Q_i=\frac{1}{6}(P_{i-1}+4P_i+P_{i+1})$$
  - 第1段曲线方程 i=1， $$C_{1,3}(0)=Q_1=\frac{1}{6}(P_0+4P_1+P_2)$$
  - 第（N–1）段曲线方程 i=N–1,

$$C_{N-1,3}(0)=Q_{N-1}=\frac{1}{6}(P_{N-2}+4P_{N-1}+P_N)$$

$$C_{N-1,3}(1)=Q_N=\frac{1}{6}(P_{N-1}+4P_N+P_{N+1})$$

  - 显然，多出了两个未知向量：P_0,P_{N+1}
  - 需要补充两个方程才能求解

B样条曲线插值定义

- 常见的边界条件：
  - 两个端点的切线
    - 方向与模长,都会影响生成曲线的形状
    - 切线可由数值方法估计得到
  - “自然边界条件”
    - 二阶导数为零
    - 对应于边界不受力的“自然”状态
  - 其它边界条件
    - 给定端点的曲率，如螺旋桨的设计需要

B样条曲线插值定义

- 由曲线定义式求导：

$$\frac{d}{du}C_{i,3}(u)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3u^2 & 2u & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{i-1}\\ P_i\\ P_{i+1}\\ P_{i+2}\end{bmatrix}$$

$$\frac{d^2}{du^2}C_{i,3}(u)=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6u & 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{i-1}\\ P_i\\ P_{i+1}\\ P_{i+2}\end{bmatrix}$$

B样条曲线插值定义

- 两个端点的切线

$$\frac{d}{du}C_{1,3}(0)=\frac{1}{2}\left[-P_0+P_2\right]$$

$$\frac{d}{du}C_{\mathrm{N-1,3}}(1)=\frac{1}{2}\left[-P_{\mathrm{N-1}}+P_{\mathrm{N+1}}\right]$$

- “自然边界条件”，二阶导数为零

$$\frac{d^2}{du^2}C_{1,3}(0)=0=\left[P_0-2P_1+P_2\right]$$

$$\frac{d^2}{du^2}C_{\mathrm{N-1,3}}(1)=0=\left[P_{N-1}-2P_N+P_{N+1}\right]$$

B样条曲线插值定义的节点序列

- 定义B样条基函数的节点序列选择
  - 均匀节点,矩阵表示是常数矩阵
    - 但当给顶点分布不够均匀时，曲线形状不理想
  - 非均匀节点,采用节点之间的距离，反映给定点之间的“距离”分布：
    - 欧氏距离
    - “向心参数”,欧氏距离的平方根（1990）

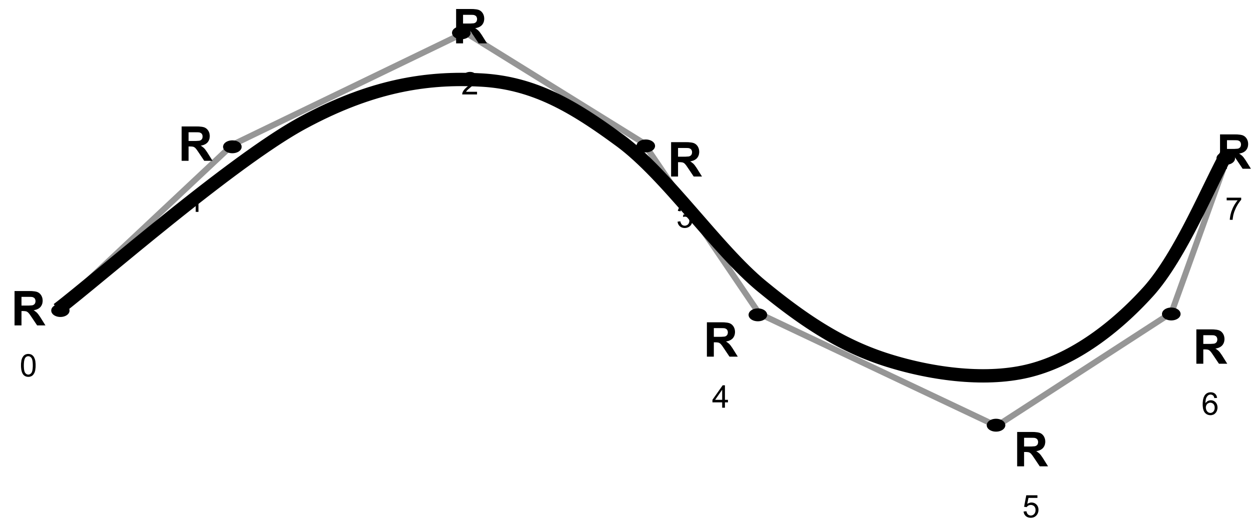
B样条基函数与Bezier基函数的关系

- 相同次数的多项式的基底,相差一个变换矩阵
- 当 k 次B样条基函数的节点序列上,每一个节点都取 k 次重复的节点时,B样条基函数成为Bezier基函数
  - 三次函数的节点:
    $u = \{0,0,0,1,1,1,2,2,2,3,3,3,\ldots,n,n,n\}$
- "准均匀"B样条曲线:
  - 在端点 k 次重复相同的节点
  - 其余为均匀分布,如:

    $u = \{0,0,0,1,2,3,\ldots,n,n,n\}$

B样条基函数与Bezier基函数的关系

- 因此,可以在均匀B样条曲线定义中,在两个端点取相同的重复节点,使得在端点具有Bezier 曲线的性质:
  - 与端点的控制顶点重合;
  - 与端点处的控制顶点向量相切;



三次准均匀B样条基函数

- 当曲线段数M≥5，开头和结尾各两段曲线的基函数矩阵与标准非均匀节点矩阵不同：

$$\begin{bmatrix} -1 & \frac{7}{4} & -\frac{11}{12} & \frac{1}{6} \\ 3 & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{7}{12} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{4} & -\frac{4}{5} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{11}{12} & -\frac{7}{4} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

$$u = \{0,0,0,1,2,3,\ldots,n,n,n\}$$

参数曲线曲面与隐式曲线曲面

- 参数曲线曲面
  - 易于求值
  - 单值函数
  - 连接直观
  - 可局部定义
  - 易于可视化
  - 难于求得交点
  - 可消去参数，变成隐式形式
    - k 次平面参数曲线变成 k 次代数曲线；
    - M*N 次参数曲面，变成 2 M*N 次代数曲面。

参数曲线曲面与隐式曲线曲面

- 隐式曲线/曲面　$F(x,y)=0/F(x,y,z)=0$
  - 计算复杂
  - 可能多值
  - 整体表示
  - 难于连接
  - 难于可视化
  - 不总是可参数化

参数曲线曲面与隐式曲线曲面

- 现有工业产品设计软件、精确几何建模建立在参数方法之上
  - 求交困难、几何运算不“封闭”
- 如果几何运算涉及到的数学表示分别是隐式和参数表示，则计算会得到很大简化
  - 例如：

    $F(x,y,z)=0$

    $G:\{x(s,t),y(s,t),z(s,t)\}$
  - 可将G 带入F 表达式，变成一个隐式方程：

    $F(x(s,t),y(s,t),z(s,t))=0$

参数曲线曲面与隐式曲线曲面

- 希望找到可参数化的较为简单的隐式表示
  - 方便两者相互转换
- 这一问题仍在探索中，an open problem 。
- 几何建模的上述问题引出了细分曲面方法，随后会介绍。

问题？